Co: Trigonalisation (par la dualité) | Leçons : 151, 156, 159

Thm : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dim finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes de E commutant deux à deux.

Si les f_i sont trigonalisables, alors on peut les trigonaliser ~~une~~ dans une même base.

Preuve :

$\boxed{\text{Etape 1}}$ Montrons par récurrence sur n qu'il existe un vecteur propre commun à tous les $(f_i)_{i\in I}$

- Si $n=1$, on a bien le résultat
- Supposons le résultat vrai pour tout $k<n$ et montrons le au rang n.

~~Si tous les f_i sont des homothéties, elles sont toutes diagonalisables dans la base canonique donc dans une base commune d'où le résultat~~

Si tous les f_i sont des homothéties, alors ils sont de la forme $\forall x\in E, f_i(x)=\lambda_i x$

Et les f_i ont bien un vecteur propre en commun.

Sinon il existe une fonction f qui n'est pas une homothétie. f est trigonalisable donc admet une valeur propre λ de sous-espace propre $E_\lambda(f)$

On a $\dim E_\lambda(f) < n$ (car f n'est pas une homothétie)

et $E_\lambda(f)$ est stable par tous les f_i par commutativité des f_i.

Donc par hypothèse de récurrence, il existe un vecteur propre commun à tous les $f_{i|E_\lambda}$ qui est aussi vecteur propre commun à tous les f_i.

$\boxed{\text{Etape 2}}$ Montrons par récurrence sur n que les $(f_i)_i$ sont trigonalisables dans une base commune

- Si $n=1$, on a bien le résultat
- Supposons vrai le résultat au rang $n-1$ et montrons le au rang n.

Les applications ${}^t f_i$ sont également trigonalisables car $\chi_{{}^t f_i} = \chi_{f_i}$

et elles commutent deux à deux.

Donc on applique l'étape 1 aux ${}^t f_i$ et donc les ${}^t f_i$ possèdent tous un vecteur propre en commun. Soit $x \in E^*$ un tel vecteur.

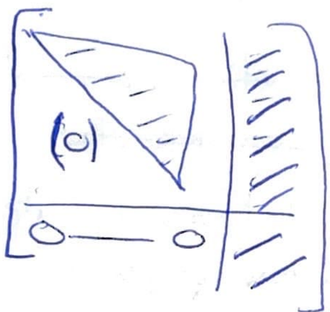
Donc $\mathbb{K}x$ est stable par tous les ${}^t f_i$.

Donc l'orthogonal H de $\mathbb{K}x$ dans E est donc un hyperplan de E stable par tous les f_i

Or par hypothèse de récurrence, il existe une base β de H trigonalisant tous les $f_{i|H}$ (car $\underbrace{\dim H}_{=n-1} < n$).

Soit $e \in E$ tel que $\beta' = (\beta, e)$ la concaténation de la base H et d'un vecteur de E forme une base de E.

On a alors $\forall i \in I$, la matrice de f_i dans la base β' :

$\mathrm{Mat}_{\beta'} f_i =$ 

$$= \left[\begin{array}{cccc|c} \multicolumn{4}{c|}{\overbrace{\hphantom{\times \quad \cdots \quad \times}}^{\mathrm{Mat}_{\beta} f_{i|H} \text{ triangulaire par hypothèse de récurrence}}} & \\ \times & \cdots & \cdots & \times & \times \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ (0) & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & \times & \times \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & \times \end{array}\right]$$

Donc β' trigonalise tous les f_i.

D'où la récurrence.

Algèbre, Gourdon

COMPLEMENT

- Si $u \circ v = v \circ u$ alors $E_\lambda(u)$ est stable par v

  En effet pour $x \in E_\lambda(u)$, $u(x) = \lambda x \Rightarrow (v \circ u - \lambda v)(x) = 0$
  $\Rightarrow (u - \lambda id)(v(x)) = 0$
  $\Rightarrow v(x) \in E_\lambda(u)$.

- On a ${}^t(u \circ v) = {}^tv \circ {}^tu$

  En effet $x \in E$, $\phi \in E^*$, $\langle (u \circ v)(x), \phi \rangle = \langle x, {}^t(u \circ v)(\phi) \rangle$
  $\cancel{\langle u(x), {}^tv}$ =
  $\langle v(x), {}^tu(\phi) \rangle$
  $= \langle x, ({}^tv \circ {}^tu)(\phi) \rangle$

- $\chi_{{}^tu} = \chi_u$, par définition du déterminant avec la somme sur l'ensemble des permutations on a que le déterminant est invariant par transposition d'où le polynôme caractéristique aussi.

- $F \subset E$ stable par $u \iff F^\perp \subset E^*$ stable par ${}^tu$.

  En effet - Si F est stable par u et $\phi \in F^\perp$, $x \in F$ on a
  ${}^tu(\phi)(x) = \underbrace{\phi}_{\in F^\perp}(\underbrace{u(x)}_{\in F}) = 0$ d'où ${}^tu(\phi) \in F^\perp$.

  - Si $F^\perp$ est stable par ${}^tu$ et $x \in F$, $\phi \in F^\perp$ on a
  $0 = \underbrace{{}^tu(\phi)}_{F^\perp}\underbrace{(x)}_{\in F} = \langle \underbrace{x}_{\in F}, \underbrace{{}^tu(\phi)}_{\in F^\perp} \rangle = \langle u(x), \underbrace{\phi}_{\in F^\perp} \rangle \Rightarrow u(x) \in F$